Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 7

Abgabe: Freitag, den 15. Dezember 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 7.1 *(1+2+1 Punkte)*

Ein *Polynom* über einem Körper K in der Unbestimmten x ist von der Gestalt

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

wobei $c_i \in K$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist und nur endlich viele c_i von Null verschieden sind. Ist $c_n \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, so schreibt man kurz

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

und sagt f ist vom *Grad* n (in Zeichen: $\deg(f) = n$). Die Menge aller Polynome über K in der Unbestimmten x wird mit $K[x]$ bezeichnet. Diese Menge kann mit einer (Vektor)Addition $+$ und einer Skalarmultiplikation $\bullet$ versehen werden: Für $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in K[x]$ und $c \in K$ sei

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i &:= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \\ c \bullet \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i &:= \sum_{i=0}^{\infty} c a_i x^i. \end{aligned}$$

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $(K[x], \bullet, +)$ ein K-Vektorraum ist. Das neutrale Element der Vektoraddition ist dabei das Nullpolynom $0 := \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ mit $c_i = 0$ in K für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Folglich gilt $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ genau dann, wenn $a_i = b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Sei K nun ein fixierter Körper und $d \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Mengen $K[x]_{\leq d} := \{f \in K[x] \mid \deg(f) \leq d\}$ und $K[x]_{=d} := \{f \in K[x] \mid \deg(f) = d\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $K[x]_{\leq d} \cup \{0\}$ ein Teilraum von $(K[x], \bullet, +)$ ist.
(b) Bestimmen Sie eine Basis von $K[x]_{\leq d} \cup \{0\}$ und leiten Sie die Dimension von $K[x]_{\leq d} \cup \{0\}$ her.
(c) Untersuchen Sie, ob es sich bei $K[x]_{=d} \cup \{0\}$ ebenfalls um einen Unterraum von $(K[x], \bullet, +)$ handelt.

Aufgabe 7.2 *(1+1+1+1 Punkte)*

Für einen beliebigen Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}(K)$ heißt A *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Es bezeichne $\mathrm{Sym}_{n \times n}(K)$ die Menge aller symmetrischen Matrizen in $M_{n \times n}(K)$. Falls ferner $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, so heißt $B := (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}(K)$ *alternierend*, falls $b_{ij} = -b_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Es bezeichne $\mathrm{Alt}_{n \times n}(K)$ die Menge aller alternierenden Matrizen in $M_{n \times n}(K)$. *Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $\mathrm{Sym}_{n \times n}(K)$ und $\mathrm{Alt}_{n \times n}(K)$ Teilräume des K-Vektorraumes $M_{n \times n}(K)$ bilden.*

Sei K nun ein fixierter Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Sym}_{n \times n}(K)$ und leiten Sie die Dimension von $\mathrm{Sym}_{n \times n}(K)$ her.
(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Alt}_{n \times n}(K)$ und leiten Sie die Dimension von $\mathrm{Alt}_{n \times n}(K)$ her.
(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Sym}_{n \times n}(K) + \mathrm{Alt}_{n \times n}(K)$.
(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Sym}_{n \times n}(K) \cap \mathrm{Alt}_{n \times n}(K)$.

Aufgabe 7.3 *(1+1+1+1 Punkte)*

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt *maximal linear unabhängig*, falls X linear unabhängig ist und $X \cup \{x\}$ linear abhängig für jedes $x \in V \backslash X$ ist. Ferner heißt eine Teilmenge $Y \subseteq V$ *minimal erzeugend*, falls $\operatorname{span}(Y) = V$ und $\operatorname{span}(Y \backslash \{y\}) \neq V$ für alle $y \in Y$ gilt.

(a) Sei $X \subseteq V$ linear unabhängige mit $|X| = n$. Zeigen Sie, dass X eine Basis von V ist.

(b) Sei $Y \subseteq V$ endlich mit $\operatorname{span}(Y) = V$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $\mathcal{B} \subseteq Y$ existiert. Gilt dies auch, wenn Y eine unendliche Teilmenge ist? Beweisen oder widerlegen Sie!

(c) Sei $Y \subseteq V$ mit $|Y| = n$ und $\operatorname{span}(Y) = V$. Zeigen Sie, dass Y eine Basis von V ist.

(d) Sei $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) X ist maximal linear unabhängig.

  (ii) X ist minimal erzeugend.

  (iii) X ist eine Basis von V.

Aufgabe 7.4 *(1+1+1+1 Punkte)*

Sei K ein Körper, $k \subseteq K$ ein Teilkörper und $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Seien $A, B \in M_{n\times m}(K)$ beide in r.Z.S.F. Zeigen Sie, dass A genau dann zeilenäquivalent zu B ist, wenn $A = B$. Folgern Sie, dass die r.Z.S.F. einer Matrix eindeutig ist.

(b) Sei $A \in M_{n\times m}(k)$, $B \in M_{n\times m}(k)$ die r.Z.S.F. von A über k und $C \in M_{n\times m}(K)$ die r.Z.S.F. von A über K. Zeigen Sie $B = C$.

Sei nun $A \in M_{n\times n}(k)$ und betrachten Sie das homogene Gleichungssystem S gegeben durch $A\underline{X} = \underline{0}$.

(c) Zeigen Sie, dass S genau dann eine nicht-triviale Lösung in k^n besitzt, wenn S eine nicht-triviale Lösung in K^n besitzt.

(d) Es bezeichne $L_k(S)$ die Lösungsmenge von S in k^n und $L_K(S)$ die Lösungsmenge von S in K^n. Untersuchen Sie welche Inklusionen zwischen beiden Mengen auftreten können und wann welcher Fall eintritt.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(2 Bonuspunkte)*

Sei K ein Körper, $(V, \bullet, +)$ ein K-Vektorraum und U, W Teilräume von V sodass $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass zu jedem $v \in V$ ein eindeutiges $u \in U$ und ein eindeutiges $w \in W$ existiert, sodass $v = u + w$.

Besuchen Sie uns auf dem Weihnachtsmarkt am 13.12.2023 um 18 Uhr vor dem doppelstöckigen Glühweinstand! Wir freuen uns auf Sie.